

## DAL RILIEVO ALL'ANALISI DI SUPERFICI COMPLESSE: IL CASO DELLA PSEUDO-CUPOLA DI GALLA PLACIDIA

### 1. INTRODUZIONE

Le vicende del piccolo edificio in laterizi sono legate al nome dell'imperatrice romana Galla Placidia (390 circa-Roma 450), figlia di Teodosio I. Eretto probabilmente tra il 432 e il 450, originariamente era uno dei due sacelli posti alle estremità del narcece della basilica di Santa Croce (417-425 ca.) (DAVID 2013), uno tra i complessi sacri più antichi di Ravenna, probabile testimonianza della fervente devozione dell'Augusta Imperatrice per la reliquia della Vera Croce, che secondo la tradizione fu ritrovata dalla madre dell'imperatore Costantino I, Flavia Giulia Elena. Il Mausoleo si presenta oggi come un piccolo edificio isolato a croce latina con i bracci coperti da volte a botte, mentre all'incrocio di questi è una pseudo-cupola. La decorazione musiva che ricopre la maggior parte delle superfici interne lo rende uno dei più celebri monumenti ancora esistenti tra quelli edificati nella fase di declino dell'Impero Romano d'Occidente.

Su questa architettura si è concentrata l'attenzione di molti studiosi che, a partire dall'inizio del XX secolo, ne hanno indagato aspetti storici, artistici, iconografici, ma anche tecnologici e conservativi (per la vasta bibliografia si rimanda a: RICCI 1914; BOVINI 1950; IANNUCCI 1995, 1996; RIZZARDI, ANGIOLINI MARTINELLI 1996; RIZZARDI 2005; SWIFT, ALWIS 2010; RANALDI 2011; PENNI 2021). Recentemente il nostro gruppo di ricerca ha formulato nuove ipotesi su aspetti mensori, archeoastronomici, iconografici, sull'impiego della geometria piana e proiettiva in alcuni saggi tra cui INCERTI *et al.* 2018. Sintetizzando alcune delle conclusioni proposte si rileva che: l'edificio appare coerente con la misura del piede romano; è stata misurata la rotazione relativa tra i due bracci della croce ipotizzandone una motivazione archeoastronomica; alcune aperture potrebbero aver creato effetti solari ierofanici; è stata individuata la regola geometrica utilizzata per l'esecuzione del cielo stellato della pseudo-cupola e immaginata una macchina di cantiere utile allo scopo.

Il rilievo avanzato tridimensionale, morfologico e materico, ci ha consentito di realizzare analisi in passato impossibili da eseguire con le metodologie tradizionali. Anche se ad occhio nudo i ricorsi delle stelle descrivono delle circonferenze regolari apparentemente giacenti su piani paralleli, nella realtà il loro andamento segue un motivo "festonato" risultato di un'operazione di proiezione sulla superficie della copertura da un punto collocato centralmente, circa all'altezza della base delle finestre. La geometria che sottende questo tracciamento si fonda su una serie di coni il cui angolo al vertice aumenta

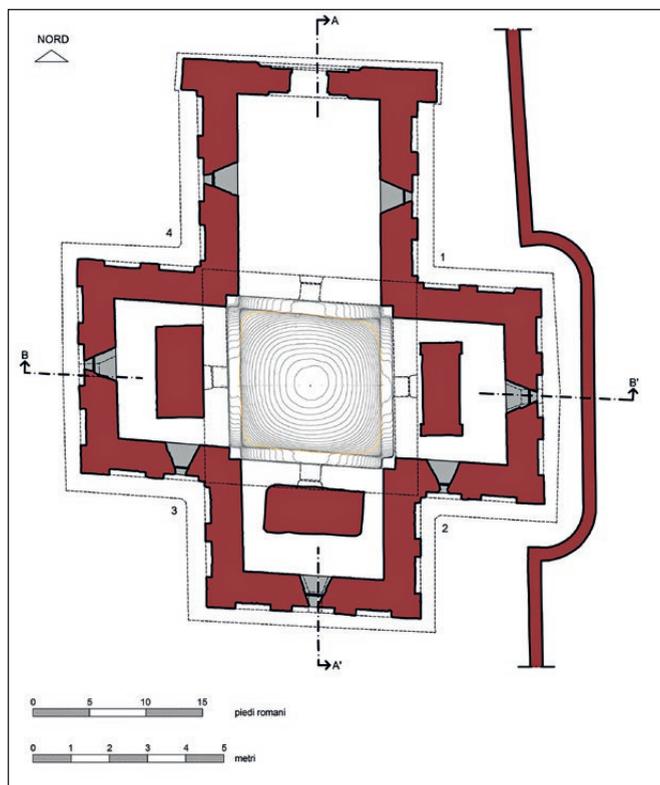


Fig. 1 – Pianta del Mausoleo alla quota +1,20, in grigio la proiezione virtuale delle curve di livello pseudo-cupola (l'elaborato è stato prodotto a partire dalla restituzione di G. Lavoratti).

progressivamente e la cui possibilità di materializzazione è data dalla conoscenza del principio di funzionamento dello strumento astronomico chiamato “Triquetro” e della *Tavola delle corde* di Tolomeo.

Il rilievo laser scanner (Faro Focus X 330) e la fotogrammetria digitale, grazie al dato metrico congiunto a quello materico della decorazione musiva, consentono di proseguire oltre nella ricerca: possiamo infatti continuare ad interrogare geometricamente il modello mesh ottenuto dalla triangolazione della nuvola di punti, utilizzando il metodo del reverse modeling (MIGLIARI 2004) al fine di comprendere e ricostruire il modello virtuale della superficie. Con il presente contributo si propone una inedita lettura della morfologia della copertura del vano centrale, ancora non completamente risolta negli studi precedenti.

Apparentemente irregolare, questa superficie è impostata su un parallelogramma e non è riconducibile ad operazioni di rivoluzione di una curva, ad una volta a crociera o a padiglione. La sezione della mesh di rilievo con un fascio di piani orizzontali con passo di 10 cm ha restituito un insieme di linee curve, tutte differenti tra loro (Fig. 1), che intuivamo comunque connesse da una regola inconsueta, non ancora messa a fuoco. Una prima analisi ha consentito di verificare che si tratta di iperboli, curve di complesso tracciamento, soprattutto nell'ambito di un cantiere edilizio.

## 2. GLI ELEMENTI NOTEVOLI DELLA PSEUDO-CUPOLA

La superficie della pseudo-cupola è delimitata dai quattro piani degli arconi del vano centrale e la sua base è assimilabile ad un parallelogramma regolare con lati opposti di circa 12,5 e 12,1 piedi romani (3,70 m e 3,59 m). Anche le dimensioni degli angoli opposti sono necessariamente simili a coppie: gli angoli 1 e 3 misurano circa 95°, mentre 2 e 4 circa 85°.

Per quanto concerne i profili delle sezioni in asse (Fig. 2) è possibile rilevare che questi hanno un andamento singolare: alla quota di +7,30 m (chiave degli archi superiori) inizia infatti un tratto quasi verticale che rapidamente

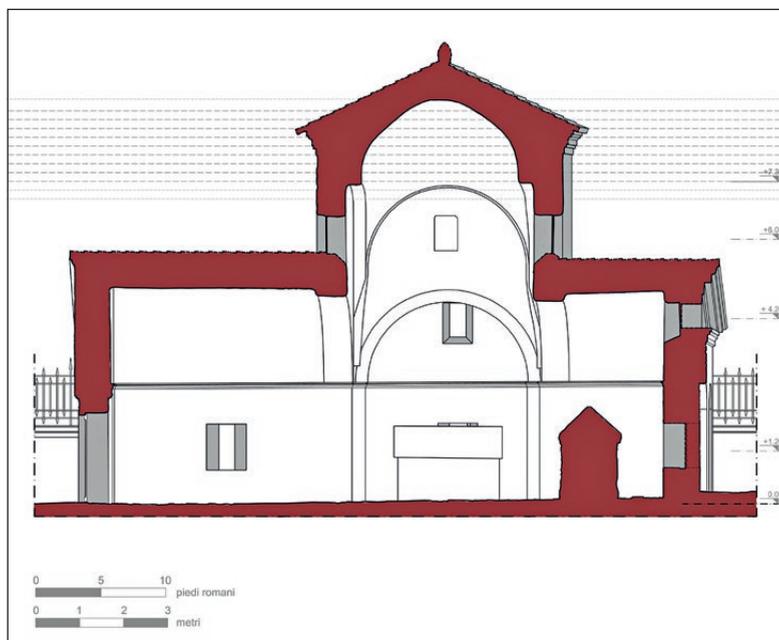


Fig. 2 – Sezione longitudinale (l'elaborato è stato prodotto a partire dalla restituzione di G. Lavoratti).

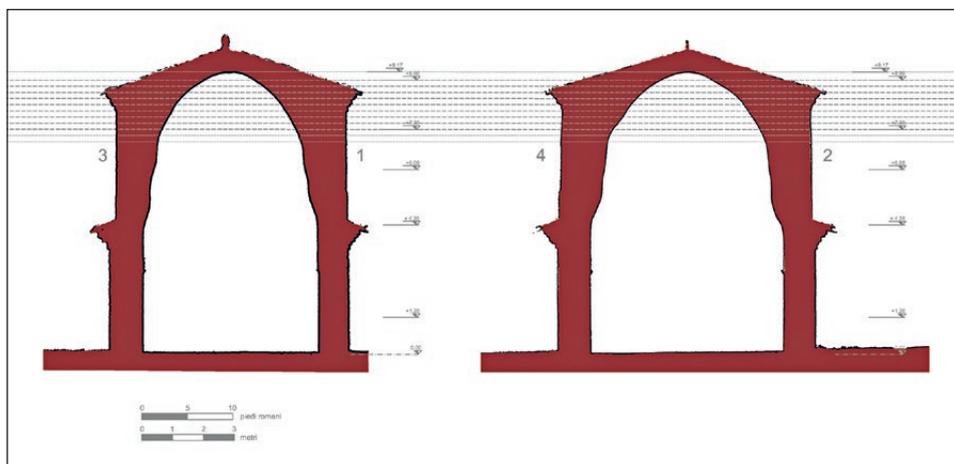


Fig. 3 – Slice della nuvola di punti eseguita sulle diagonali del vano.

si curva poi verso l'interno. I profili delle sezioni diagonali al di sopra della medesima quota (Fig. 3) sono invece più regolari e suscettibili di una analisi geometrica; la parte sottostante a +7,30 m, infine, è costituita dal complesso raccordo tra i piani degli archi della pseudo-cupola e i piani dei sottostanti pilastri, come si deduce dalla Fig. 1. Dall'osservazione delle sezioni si ricava infine che anche la sommità della superficie di copertura presenta un'ulteriore variazione dell'andamento, con una chiara discontinuità alla quota di +8,90 m circa.

Dalle fotografie delle fasi di distacco dei mosaici scattate durante i restauri del 1978 e conservate nell'Archivio Fotografico della Soprintendenza ai Monumenti di Ravenna, desumiamo che la muratura sia stata messa in opera secondo un andamento orizzontale con inclinazione della giacitura progressivamente crescente. Dall'arcone di imposta, realizzato con mattoni disposti radialmente di coltello, contiamo circa 35 ricorsi sino all'area della chiave della copertura in cui gli elementi sono di dimensioni più piccole e disposti in modo più caotico. Durante la posa fu necessario relazionare la lunghezza dei profili delle sezioni trasversali e longitudinali (pari a 2,85 m circa) con quella delle diagonali (pari a 3,02 m e 3,08 circa): una differenza di circa 20 cm di lunghezza che, in qualche modo, sarà stata ripartita per mantenere l'orizzontalità dei filari. L'estradosso, come è noto, non è rilevabile dal momento che, già con i lavori di restauro del 1898-99, fu messo in luce come nella parte superiore siano presenti, sopra uno strato di riempimento, delle anfore di terracotta allineate nella direzione della pendenza delle falde, con funzione di alleggerimento e di appoggio per il manto di copertura (RICCI 1914).

### 3. FORMA DELLE CURVE DI LIVELLO, CONOSCENZE SCIENTIFICHE E TECNICHE DI TRACCIAMENTO

L'intersezione della superficie della mesh con un fascio di piani orizzontali ci restituisce un insieme di curve di livello (Figg. 1-3) che sono state analizzate con il software GeoGebra nella sua modalità classica (<https://www.geogebra.org/>). In questo ambiente (Fig. 4) è stato possibile dedurre alcune particolarità utili per proseguire nelle ipotesi ricostruttive. Si tratta di iperboli il cui centro sembra localizzarsi in un'area limitata esterna alla copertura (anche se molto prossima); inoltre, per le prime 4-5 curve, il limite non è sugli assi trasversale e longitudinale, ma è anticipato, poiché la porzione della superficie sovrastante gli archi di imposta si approssima ad un piano. L'analisi dei quattro settori ha evidenziato condizioni analoghe sugli angoli opposti, in particolare, una minore distanza del centro delle coniche dai vertici del parallelogramma 1 e 3 rispetto a 2 e 4.

L'iperbole è una curva aperta composta da due rami che si ottiene sezionando un cono con un piano parallelo all'asse oppure quando l'angolo tra il piano e l'asse è inferiore a quello fra l'asse e la generatrice. Tra le prime teorie documentate sulle coniche e l'edificazione del piccolo Mausoleo di Galla Placidia trascorsero circa otto-nove secoli e almeno sei importanti figure della

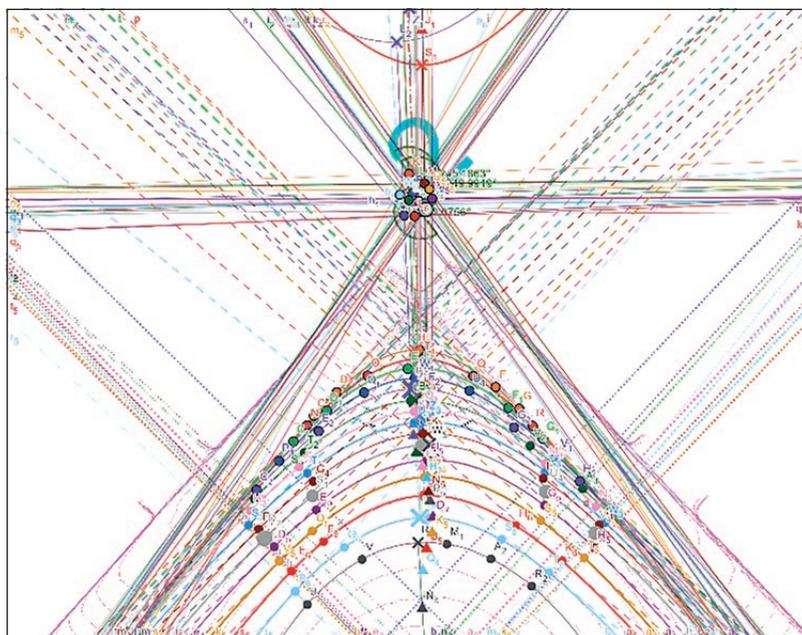


Fig. 4 – Settore 2: dettaglio dell'analisi grafica con GeoGebra.

storia della matematica e della geometria resero la loro trattazione sempre più sofisticata e complessa: Eudosso di Cnido (vissuto tra 408 e il 355 a.C.), Menecmo (discepolo di Eudosso e fratello di Dinostrato, vissuto tra il 380 e il 320 a.C.), Euclide (Alessandria, vissuto tra il 320 e il 270 a.C.), Archimede (Siracusa, vissuto tra il 287 e il 212 a.C.), Apollonio di Perga (vissuto tra il 262 e il 190 a.C.), Claudio Tolomeo (vissuto tra il 100 ca. e il 170 ca. d.C.). Posteriori sono invece Antemio di Tralle (vissuto tra il 474 al 534), Isidoro da Mileto (vissuto tra il 442 e il 537), Eutocio di Acalona (vissuto tra il 442 e il 537) e, molto più tardi, gli arabi tra cui Al-Sijzî (945-1020). Un sintetico approfondimento storico (che non è possibile riportare per ragioni editoriali) ha consentito di ragionare sui metodi attraverso cui le iperboli potevano essere tracciate all'epoca in esame, con il fine di valutare quale tra questi poteva essere realisticamente utilizzato in un ambito complesso e scomodo come quello di un cantiere edilizio, non proprio assimilabile ad un foglio da disegno. In estrema sintesi è possibile riferirsi a due tipologie: per punti e per costruzione continua (RAYNAUD 2007).

Il primo sistema comporta l'identificazione rigorosa di alcuni punti, mediante metodi gnomonici o inviluppo di tangenti che, in seguito, vengono uniti a mano o con un elemento lineare flessibile. Al secondo sistema appartengono invece i metodi che realizzano il tracciamento continuo mediante l'uso di punti notevoli attraverso dispositivi che operano (grazie ad un movimento) nel piano, attraverso righe, fili e punti notevoli (fuochi), oppure nello spazio. La laboriosità e complessità della costruzione geometrica nel piano in un cantiere edilizio porta ad escludere questa prima ipotesi e approfondire invece la seconda.

Il meccanismo che, operando nello spazio, rende possibile il disegno delle coniche prese il nome di "compasso perfetto" solo in età medioevale. La sua storia è legata in particolare alle figure di tre prestigiosi matematici arabi della fine del X secolo che «inventarono dei nuovi strumenti per il tracciato continuo delle curve coniche ed elaborarono i mezzi teorici indispensabili per spiegare e controllare il loro funzionamento. Ibn Sahl, al-Qūhī e al-Sijzī hanno scritto ciascuno su uno o sull'altro strumento per tracciare queste curve» (RASHED 2003, 9). I fondamenti teorici necessari alla sua formulazione (RASHED 2005, 629-974) sono tuttavia da individuare nell'ultimo gruppo di proposizioni del libro I delle *Coniche* (52-58) di Apollonio così come dimostrato da Rashed nel suo poderoso commentario (APOLLONIUS DE PERGE 2008, 194-216, 535-549).

Questi brevi cenni, certamente non esaustivi, sono comunque necessari per introdurre alcune riflessioni sulle pratiche operative. Nel particolare caso del cantiere di Galla Placidia le iperboli variano al crescere della quota del piano di sezione (coerente con la giacitura dei mattoni) e sono diverse tra di loro sui quattro angoli. L'unica ipotesi percorribile in ambito edilizio ci pare possa essere una macchina basata sul principio del "compasso perfetto" che, come è stato ricordato, anche se codificato nel X secolo, trova i suoi

fondamenti teorici nell'ultimo gruppo di proposizioni del Libro I delle *Coniche* di Apollonio. È molto interessante quanto scrive a questo proposito Abū Sahl Wayjan ibn Rustam al-Qūhī said (922 ca.-1000 ca.), uno dei codificatori di questo strumento, che, nell'apertura della sua opera, non esclude che sia già esistito in precedenza, magari con nome e finalità diverse da quelle da lui sviluppate nel corso della sua trattazione (RASHED 2005, 726).

I compassi perfetti di matrice araba sono strumenti raffinati e si fondano su un principio molto semplice che occorre ricondurre alla definizione del cono data da Apollonio: fissati un punto P e una circonferenza, il cono viene generato dalla rotazione di una retta che, vincolata in P, ruota seguendo la traiettoria circolare. Se immaginiamo di poter gestire la lunghezza del segmento (che noi chiamiamo generatrice) attraverso un sistema telescopico, allora è possibile definire facilmente l'intersezione di tale linea con un qualsiasi piano. Questo strumento è in grado di governare qualsiasi configurazione geometrica: coni retti e obliqui, piani comunque inclinati rispetto alle generatrici e all'asse. È dunque cioè possibile disegnare con una linea continua, mediante una semplice rotazione, ellissi, parabole, iperboli oltre che, ovviamente, cerchi. Tra queste, come è stato già ricordato, la curva aperta dell'iperbole si ottiene sezionando un cono sia con un piano parallelo all'asse, sia quando l'angolo tra il piano e l'asse è inferiore a quello fra l'asse e la generatrice.

#### 4. IL MODELLO DIGITALE COME STRUMENTO DI VALIDAZIONE DI UNA IPOTESI: UN PROCESSO ITERATIVO

Nello svolgimento di questa ricerca, che ha visto mettere in opera numerosi tentativi con diversi modelli digitali, si è consolidata l'idea che per il tracciamento possa essere stata utilizzata una macchina i cui movimenti fossero pochi e semplici. Indubbiamente la condizione più agevole per gli operatori è quella data da spostamenti sull'asse z, in altre parole da traslazioni verticali dell'intero sistema. La forma più elementare di questo meccanismo può essere ricondotta ad un cono retto con asse orizzontale, sezionato con un piano parallelo all'asse (Fig. 5). Questo tipo di configurazione è abbastanza agevole da ricreare nello spazio perché gli estremi dell'asse del cono retto sono alla medesima quota (quindi si spostano simultaneamente della stessa quantità), mentre il piano di sezione è orizzontale e, dunque, parallelo all'asse. La forma delle iperboli create (in questa configurazione, come è stato ricordato, si generano solo iperboli) varia in relazione a due fattori: la distanza tra asse e piano secante e l'ampiezza dell'angolo al vertice.

Il processo di verifica dell'ipotesi si è svolto secondo la sequenza di seguito illustrata.

– Sono state selezionate alcune sezioni orizzontali della pseudo-cupola ottenute mediante un fascio di piani con passo di 20 cm. Le curve, per una migliore

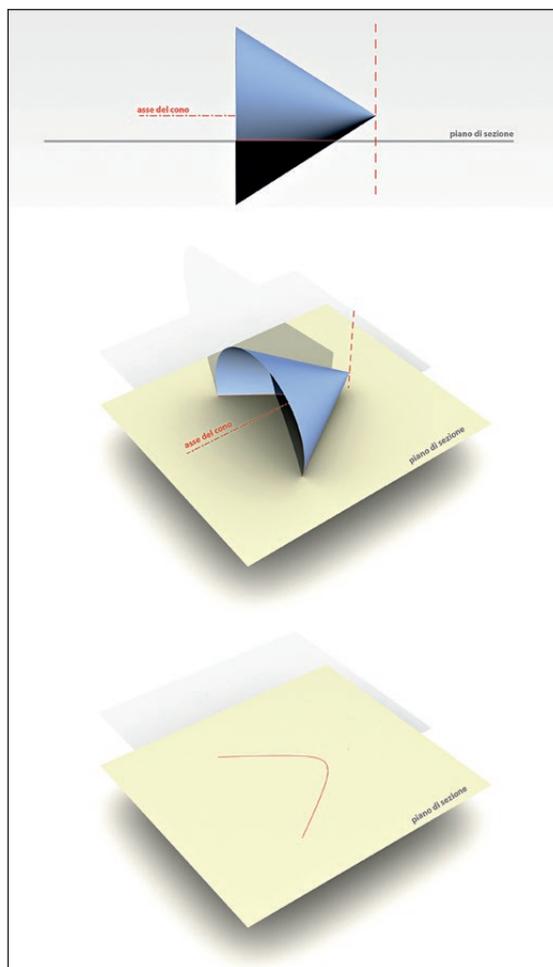


Fig. 5 – Genesi geometrica delle iperboli con asse del cono parallelo al piano di sezione.

leggibilità, sono state differenziate mediante colori: giallo (il primo livello al di sopra degli arconi, +7,30), verde (+7,50), viola chiaro (+7,70), rosa (+7,90), vinaccia (+8,10), viola scuro (+8,30), rosso (+8,50), grigio (+8,70), nero (+8,90) (Fig. 6).

– La copertura, come è stato ricordato, è suddivisibile in quattro zone simili, ma non sovrapponibili; è dunque necessario trovare la regola generatrice di 36 iperboli che si ottengono considerando, per ciascuno dei 4 angoli, le 9 sezioni orizzontali prescelte.

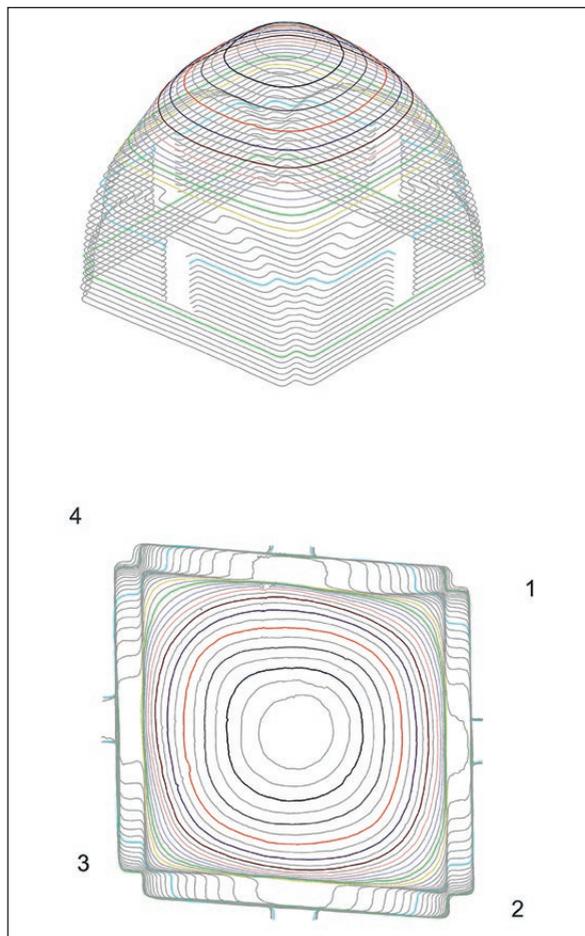


Fig. 6 – Le curve colorate al di sopra degli arconi sono quelle selezionate per l'analisi.

– L'analisi grafica svolta con GeoGebra ha consentito di individuare le aree in cui sono concentrati i centri delle iperboli (Fig. 4): ipotizzato che i coni abbiano l'asse orizzontale, questi coincidono con la proiezione del vertice che, dunque, deve muoversi su una retta verticale esterna alla pseudo-cupola. Il posizionamento di tali rette verticali all'esterno dei quattro angoli del vano costituisce il primo vincolo imposto alla “macchina”, che, così configurata, può facilmente traslare verso l'alto per step successivi.

– Sono stati fatti molti tentativi variando l'angolo del cono e l'altezza del suo vertice sino a quando non è stata trovata la curva che soddisfacesse il criterio di

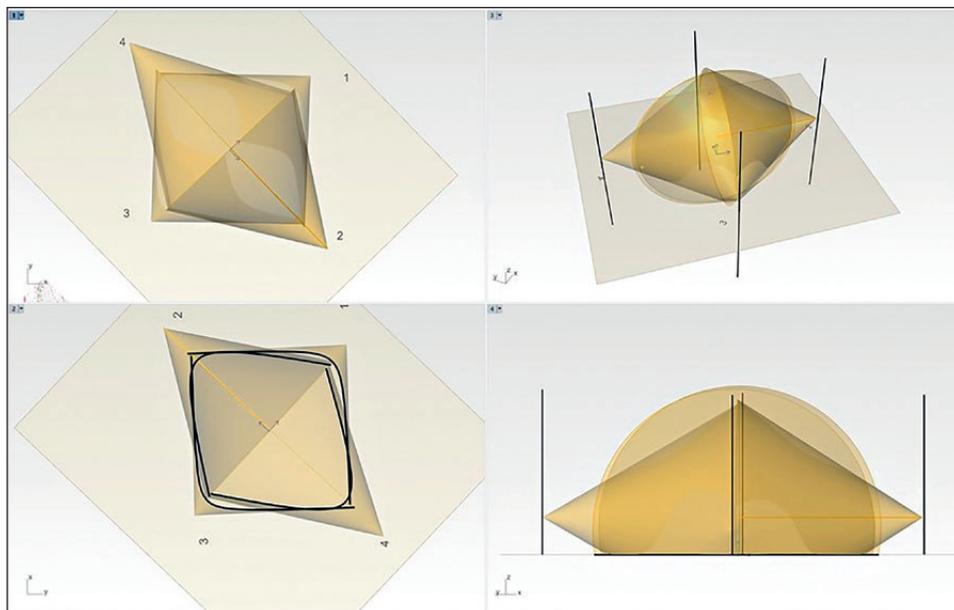


Fig. 7 – Vista dei quattro coni generatori delle iperboli di colore giallo (quota 0,00).

una buona corrispondenza tra lo stato di fatto e la geometria teorica (con una differenza nei punti di massimo scostamento medio inferiore a 1,5 cm) (Fig. 7).

Questi primi risultati sono stati confortati dalla presenza ricorrente di una serie di misure intere e di alcuni rapporti numerici. In sintesi sussistono le seguenti condizioni:

- La distanza del vertice dei coni dal centro della pseudo-cupola è un multiplo dell'unità di misura: 12 piedi romani sulla diagonale 2-4 e 9 piedi sulla diagonale 1-3. La distanza tra i vertici dei coni opposti è dunque rispettivamente di 24 piedi (7,09 m) e 18 piedi (5,32 m).
- I valori degli angoli al vertice dei coni crescono sino alla quota di +1,00 per poi decrescere progressivamente.
- Gli angoli al vertice delle coppie opposte risultano generalmente congruenti: per esempio la coppia 1-3 alla quota 0,00 (riferita al piano orizzontale tangente agli arconi) presenta lo stesso valore di  $90^\circ$ .
- Osservato che i valori della coppia 1-3 sono sostanzialmente spesso identici, mentre la coppia 2-4 presenta un maggior numero di variazioni, è possibile ipotizzare che questa condizione sia compatibile con il processo di posa dei mattoni: nell'ultimo angolo che chiude il giro si devono concentrare necessariamente le compensazioni dovute alle possibili tolleranze esecutive.

## 5. DALLA GEOMETRIA ALLA MACCHINA DI CANTIERE

Il dispositivo potenzialmente impiegabile sfrutta le medesime proprietà di quello già illustrato in INCERTI, GIANNETTI 2020. Il principio è quello del *Triquetro* (TOLOMEIO, *Almagesto*, V, 12), uno strumento astronomico composto da due aste principali di uguale lunghezza incernierate ad una estremità: la prima (a) è fissata in posizione verticale, mentre la seconda (b) è libera di ruotare. L'angolo compreso tra questi due elementi è determinabile grazie alla lunghezza di un terzo regolo graduato (c), imperniato all'estremità inferiore dell'asta verticale. L'uso della Tavola delle corde (TOLOMEIO, *Almagesto*, I, 11) in associazione a questo strumento, grazie alla relazione tra l'angolo al centro di una circonferenza e la relativa corda sottesa, consente di misurare gli angoli con grande accuratezza, attraverso semplici triangoli isosceli.

È perciò possibile ipotizzare l'esistenza di un'apparecchiatura analoga alla precedente ma ruotata di  $90^\circ$  (Fig. 8), ancora composta da tre aste, replicata per ciascuno dei quattro angoli della copertura. In questo contesto il regolo che non ruota (a) coincide con l'asse orizzontale del cono, le cui due estremità sono ancorate a due pali verticali: il primo è posto al centro della cupola (p, in comune ai quattro settori), mentre il secondo è posizionato sulla diagonale del parallelogramma, esternamente al vano (elemento che possiamo indicare con v1, v2, v3, v4 in relazione ai quattro angoli). Il secondo regolo (b) è incernierato al primo in corrispondenza dell'ancoraggio esterno ed è libero di ruotare per descrivere la superficie di un cono. Un terzo regolo graduato (c), imperniato sull'asta orizzontale consente, grazie alla sua misura, di impostare il valore dell'angolo al vertice del cono. Come nel caso della realizzazione del cielo stellato, anche in questa circostanza è da evidenziare il fatto che le lunghezze degli assi dei coni (e dunque dei regoli) siano agevolmente correlabili alla base 6 su cui è impostata la *Tavola delle corde* di Tolomeo.

Scelto l'angolo al vertice del cono, il tracciamento dell'iperbole corrispondente ad ogni giacitura può dunque essere facilmente concretizzato grazie alla rotazione di b intorno alla sua cerniera. Il sistema telescopico (già ipotizzato in merito alle tecniche esecutive del cielo stellato), peculiare del compasso perfetto, consente cioè di disegnare la conica sul piano orizzontale di posa (quest'ultimo materializzabile anche attraverso un semplice triangolo rettangolo realizzato con una corda). Il rapporto che relaziona l'incremento relativo tra la Z del piano secante e quella del vertice del cono permette di dedurre che alla traslazione verticale del piano di posa pari a  $2x$  corrisponde una traslazione dell'asse pari circa a  $3x$ , sempre con una approssimazione della misura intorno ai 3-4 cm.

Per verificare la coerenza tra il modello teorico e quello reale sono state raccordate in una unica polilinea chiusa le 4 iperboli ottenute dalla sezione dei coni con il relativo piano secante (36 coni, 4 per ciascuno dei 9 piani

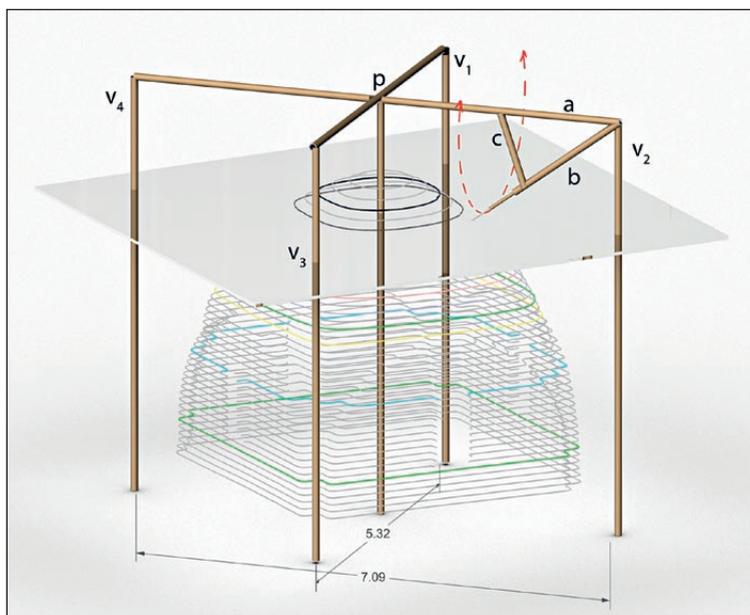


Fig. 8 – Schema della macchina di cantiere per uno dei quattro settori.

orizzontali). La superficie teorica è stata costruita a partire da un segmento ortogonale a due polilinee chiuse contigue, preso sulla diagonale. L'analisi delle superfici attraverso la deviazione dell'insieme di punti tra la superficie teorica e la mesh di rilievo restituisce un valore della deviazione standard di 0,007 m. La Fig. 9 riporta in colore blu le porzioni con una differenza inferiore ai 15 mm, mentre il giallo identifica le zone, molto circoscritte, con una discrepanza massima di 30 mm.

## 6. UN *UNICUM* OPPURE IL TESTIMONE DI UNA TIPOLOGIA?

L'applicazione di questo processo allo studio di analoghe pseudo-cupole coeve non è immediato per la difficoltà di trovare esempi affini. A quale tipologia architettonica possiamo riferire questa particolare superficie? Sovente si è scritto di «volta su pennacchi privi di elementi di discontinuità», espressione utilizzata in particolare modo in ambito anglosassone, che può tuttavia creare una certa confusione, visto che tale forma è generalmente riconducibile alla volta a vela, cioè ad una superficie ottenuta da una porzione di sfera (LANCASTER 2015, 71-74). Dall'osservazione degli esempi generalmente menzionati è possibile evidenziare che l'apparecchiatura dei conci nelle porzioni d'angolo (che si struttureranno poi nei pennacchi) in alcuni casi può discostarsi dal restante

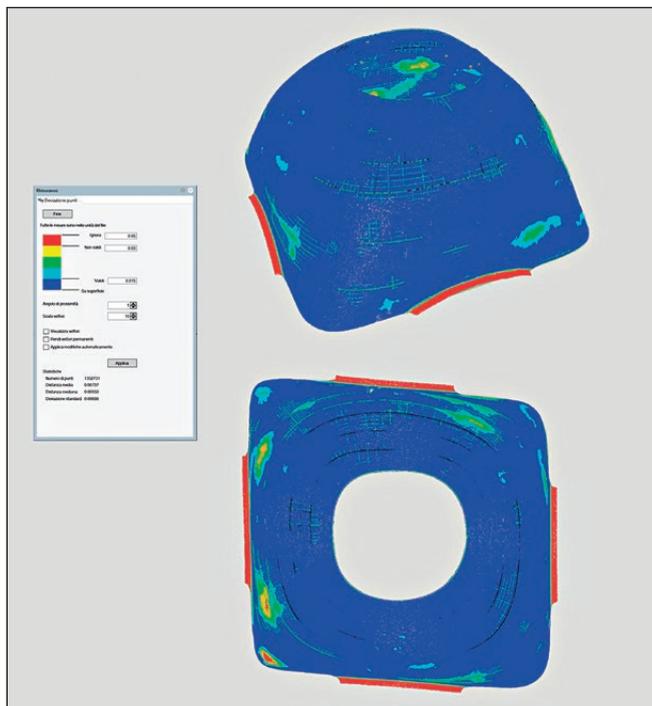


Fig. 9 – Deviazione dell'insieme di punti tra la superficie teorica e la mesh di rilievo.

andamento orizzontale dei ricorsi (CHOISY 1883, 87-91), evocando così un cambiamento dell'andamento della superficie. Tale dato visivo tuttavia deve essere verificato con i metodi della geometria sulla base di un rilievo tridimensionale.

Tra le testimonianze antiche più note troviamo quella della volta in pietra delle Terme occidentali di Gerasa (Giordania), definita come “cupola su pennacchi” probabilmente solo a causa di una variazione nella dimensione (ma non nell'andamento) dei conci lapidei. A differenza di Gerasa, nella nostra pseudo-cupola le curve orizzontali delle zone angolari sono raccordate con il piano degli arconi e non presentano discontinuità (cioè spigoli vivi). Più vicine, da un punto di vista generativo, sembrano le volte squinch, la cui apparecchiatura muraria tuttavia non è coerente con il nostro caso studio (LANCASTER 2015; ATTICO *et al.* 2019) visto che, come è stato ricordato, nelle foto di archivio l'andamento dei ricorsi sembra essere orizzontale.

La letteratura ha segnalato delle analogie tra il Mausoleo di Galla Placidia e alcuni edifici sacri a pianta cruciforme, di dimensioni contenute, in cui sono tuttavia presenti (nel caso siano sopravvissute) volte a crociera o a vela.

In merito a questo aspetto sono state evidenziate le assonanze con l'*Apostoleion* di Costantinopoli, con la *Basilica Apostolorum* e con San Simpliciano a Milano. La tipologia è quella dei sacelli cruciformi, diffusi tra il V e il VI secolo, da mettere in relazione con la tradizione funeraria dell'Asia Minore, della Cappadocia, Licia, Calicia, Grecia e Armenia. Tuttavia, molto spesso, le architetture citate sono absidate, al contrario di Galla Placidia. Menzionati infine sono i numerosi sacelli a pianta a croce greca lungo la costa adriatica (fine V-inizio IV sec.) (LO PRETE 1964; RIZZARDI 1996).

Senza alcun dubbio questa tipologia di pseudo-cupola persiste nella tradizione costruttiva pugliese di età medioevale, come si riscontra nella soluzione in pietra di San Vito a Corato (Bari, XI-XII sec.) e in diversi altri edifici già ampiamente documentati (DE CADILHAC *et al.* 2008; PERFIDO 2008; ROSSI 2008). La conferma che la morfologia della pseudo-cupola di Galla Placidia non sia un *unicum* ci può venire dalla chiesa di Santa Maria di Casaranello (anticamente nota come Madonna della Croce), costantemente messa in rapporto con il nostro edificio ravennate in ragione del ciclo musivo che decora la campata centrale del suo transetto: un cielo stellato al cui centro è una grande croce. Tale elemento architettonico, che è parte di un edificio non ancora completamente risolto dal punto di vista dell'impianto e delle relative fasi costruttive (STEFÀNO 2018; DANIELI, DE MARCO 2020), viene fatto risalire alla prima fase del V secolo proprio in regione dei mosaici (CECHELLI TRINCI 1974), anche se nuovi studi ne posticipano la datazione alla fine del V-inizio VI (FALLA CASTELFRANCHI 2005). Non abbiamo testimonianze sull'andamento dell'apparecchiatura di questa pseudo-cupola, ma dalle corrispondenze intercorse per i restauri del 1913-14 apprendiamo che la sua struttura è in conci di tufo (STEFÀNO 2018, 610).

La superficie è stata rilevata mediante fotogrammetria digitale (50 fotografie) e analizzata con la medesima metodologia precedentemente proposta: le curve generate dalla sezione con dei piani orizzontali sono, ancora una volta, riconducibili a porzioni di iperboli raccordate tra loro. I rapporti dimensionali tra coni e piani secanti sono però diversi dal caso di Galla Placidia. La Fig. 10 mostra inoltre come l'andamento geometrico delle fasce in cui è ripartito il motivo del cielo stellato abbia indubbiamente un andamento "festonato", il cui tracciamento è fattibile attraverso la medesima procedura teorizzata per il cielo stellato di Galla Placidia. In entrambi i casi le dimensioni del vano centrale sono davvero molto contenute: Casaranello presenta lati di lunghezza compresa tra i 306 e i 330 cm, mentre Galla Placidia tra i 359 e i 370 cm.

## 7. CONCLUSIONI

Il processo di reverse modeling applicato alla pseudo-cupola di Galla Placidia ha consentito di evidenziare la presenza di sezioni orizzontali riconducibili a delle porzioni di iperboli. La ricerca ha individuato, sulla base di alcune ipotesi



Fig. 10 – Viste ortogonali e prospettica della pseudo-cupola di Santa Maria di Casaranello. In rosso le sezioni della mesh con dei piani orizzontali. Modello elaborato mediante fotogrammetria digitale.

geometriche, una possibile tecnica di tracciamento basata sulla conoscenza della *Tavola delle corde* di Tolomeo e sulla realizzazione di una macchina di cantiere in grado di restituire nello spazio la superficie di un cono. Il principio di funzionamento è quello “compasso perfetto”, strumento sistematizzato molti secoli dopo l'edificazione del Mausoleo, che trova tuttavia le sue origini nell'ultimo gruppo di proposizioni del libro I delle *Coniche* (52-58) di Apollonio.

Nella fase di esecuzione, le maestranze costruirono dei coni il cui angolo al vertice è sempre minore del valore dell'angolo corrispondente del poligono di base (in questo modo gli asintoti delle iperboli non sono mai coincidenti con i lati del vano). La scelta invece del rapporto tra l'incremento delle quote verticali del vertice del cono e quello del relativo piano di posa è largamente riconducibile al valore di 2:3. Nella fase di esecuzione le variabili da tenere sotto controllo furono dunque: quota del vertice dei coni, angolo al vertice dei coni, quota del piano secante (coincidente con il piano di posa le cui variazioni sono date anche dall'inclinazione della giacitura dei mattoni).

Occorre infine ricordare che una porzione del profilo delle sezioni diagonali è, almeno in parte, ben approssimabile ad un arco di circonferenza (condizione geometrica certamente molto utile durante la fase esecutiva). Un

sistema concettualmente piuttosto complesso che diviene tuttavia facilmente realizzabile qualora siano conosciute, grazie alla trasmissione del sapere materiale, alcune proporzioni numeriche utili per relazionare i rapporti tra gli angoli al vertice di un cono e le sue relative coordinate spaziali. La superficie di Galla Placidia infine potrebbe non essere un *unicum* nel periodo come ci attestano i primi esiti dell'analisi sulla pseudo-cupola di Casaranello.

Mentre esistono studi su geometria e sviluppo di volte ellittiche e paraboliche (HUERTA 2008; ROSSI, FIORILLO 2020), questa particolare tipologia di pseudo-volta non pare trattata nella letteratura specialistica, passata e recente, su cupole e sistemi voltati (CHOISY 1883; SMITH 1950; BESEVAL 1984; ARCE 2006; HUERTA 2009; LANCASTER 2015). Da questi iniziali risultati nasce la domanda sulle origini di un tale modello costruttivo: se sia cioè da attribuire ad un ambito romano, bizantino, mediorientale, copto o altro.

Non è difficile infine comprendere come la possibilità di leggere e interrogare queste morfologie si sia potuta concretizzare solo in questi tempi, grazie a strumenti e tecniche avanzati di rilievo e di grafica digitale, strumenti e ambiti dell'informatica archeologica (MOSCATI 2019), che ci consentono non solo l'elaborazione dei dati, ma anche di concepire nuove metodologie per porre inediti quesiti.

MANUELA INCERTI

Dipartimento di Architettura  
Università degli Studi di Ferrara  
icm@unife.it

### *Crediti e ringraziamenti*

Rilievi e restituzioni grafiche sono a cura dell'autrice, a meno di quando non espressamente dichiarato. Si ringrazia la Curia Arcivescovile di Ravenna per i permessi accordati. La campagna fotografica per la fotogrammetria digitale di Santa Maria di Casaranello è stata realizzata da Alessandro De Marco e Giorgia Martiriggiano. Si ringrazia Alessandro De Marco e l'Associazione Archeo-Casarano per il supporto nella ricerca.

### BIBLIOGRAFIA

- APOLLONIUS DE PERGE 2008, *Apollonius de Perge, coniques: texte grec et arabe*, R. Rashed (ed.) Berlin, De Gruyter (Scientia graeco-arabica).
- ARCE I. 2006, *Umayyad arches, vaults & domes: Merging and re-creation. Contributions to Early Islamic construction history*, in *Proceedings 2<sup>nd</sup> International Congress on Construction History*, (Cambridge 2006), Ascot, Construction History Society, 195-220 (<https://www.arct.cam.ac.uk/Downloads/ichs/vol-1-195-220-arce.pdf>).
- ATTICO D., TURRINA A., BANFI, F., GRIMOLDI A, LANDI A.G., CONDOLEO P., BRUMANA R. 2019, *The HBIM analysis of the geometry to understand the constructive technique: The use of the trompe volume in a brick vault*, «The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences», XLII-2/W11, 107-114 (<https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLII-2-W11-107-2019>).

- BESENVAL R. 1984, *Technologie de la voûte dans l'Orient ancien*, Paris, Editions Recherche sur les civilisations.
- BOVINI G. 1950, *Il cosiddetto mausoleo di Galla Placidia in Ravennae*, Città del Vaticano, Società Amici [delle] Catacombe presso Pontificio Istituto di Archeologia Cristiana.
- CECCHELLI TRINCI M. 1974, *I mosaici di Santa Maria della Croce a Casaranello*, «*Vetera Christianorum*», 11, 1, 167-186.
- CHOISY A. 1883, *L'art de bâtir chez les Byzantins*, Paris, Librairie de la Société Anonyme de Publications Périodiques.
- DANIELI F., DE MARCO A. 2020, *Nuove ipotesi su Casaranello: l'edificio, il mosaico, gli affreschi*, Roma, Edizioni Universitarie Romane.
- DAVID M. (ed.) 2013, *La Basilica di Santa Croce: nuovi contributi per Ravenna tardoantica*, Ravenna, Edizioni del Girasole.
- DE CADILHAC R., GUARNIERI A., ROSSI G. 2008, *Strutture voltate*, in R. DE CADILHAC (ed.), *L'arte della costruzione in pietra. Chiese di Puglia con cupole in asse dal secolo XI al XVI*, Roma, Gangemi, 131-168.
- FALLA CASTELFRANCHI M. 2005, *I mosaici della chiesa di Santa Maria della Croce a Casaranello rivisitati*, in C. ANGELELLI (ed.), *Atti del X Colloquio dell'Associazione Italiana per lo Studio e la Conservazione del Mosaico*, Roma, Edizioni Scripta Manent, 13-24.
- HUERTA S. 2008, *Oval domes: History, geometry and mechanics*, «*Nexus Network Journal*», 9, 2, 211-248 (<https://doi.org/10.1007/s00004-007-0040-3>).
- HUERTA S. 2009, *The geometry and construction of Byzantine vaults: The fundamental contribution of Auguste Choisy*, in J. GIRÓN, S. HUERTA (eds.), *Auguste Choisy (1841-1909): L'architecture et l'art de bâtir. Textos sobre Teoría e Historia de las Construcciones*, 1, Madrid, Instituto Juan de Herrera, 289-305.
- IANNUCCI A.M. 1995, *Per una storiografia dei restauri ravennati: il mausoleo di Galla Placidia*, *Corso di cultura sull'arte ravennate e bizantina*, 41, Ravenna, Edizioni del Girasole, 63-76.
- IANNUCCI A.M. 1996, *Il mausoleo ritrovato: dagli adattamenti settecenteschi ai progetti e restauri tra Ottocento e Novecento*, in C. RIZZARDI (ed.), *Il Mausoleo di Galla Placidia a Ravenna*, Modena, Franco Cosimo Panini, 171-206.
- INCERTI M., D'AMICO S., GIANNETTI S., LAVORATTI G., VELO U. 2018, *Le digital humanities per lo studio e la comunicazione di beni culturali architettonici. Il caso dei mausolei di Teodorico e Galla Placidia in Ravenna*, «*Archeologia e Calcolatori*», 29, 1, 297-316 (<https://doi.org/10.19282/ac.29.2018.23>).
- INCERTI M., GIANNETTI S. 2020, *La cupola di Galla Placidia e il suo cielo stellato: geometrie, modelli e tracciamenti. The dome of Galla Placidia and its starred sky: Geometries, models and tracings*, «*Disegnare, Idee, Immagini*», 60, 38-49.
- LANCASTER L.C. 2015, *Innovative Vaulting in the Architecture of the Roman Empire: 1<sup>st</sup> to 4<sup>th</sup> centuries CE*, Cambridge, University Press.
- LO PRETE L. 1964, *Valore e significato dell'architettura nella cappella di S. Andrea a Ravenna*, «*Felix Ravenna*», 3, 38, 5-96.
- MIGLIARI R. (ed.) 2004, *Disegno come modello, riflessioni sul disegno nell'era informatica*, Roma, Aracne.
- MOSCATI P. 2019, *Informatica archeologica e archeologia digitale. Le risposte dalla rete*, in P. MOSCATI (ed.), *30 anni di Archeologia e Calcolatori. Tra memoria e progettualità*, «*Archeologia e Calcolatori*», 30, 21-38 (<https://doi.org/10.19282/ac.30.2019.03>).
- PENNI E. 2021, *San Lorenzo o re Davide? La liturgia funeraria antica nei mosaici del mausoleo di Galla Placidia*, Ravenna, Edizioni del Girasole.
- PERFIDO P. 2008, *Sistemi di raccordo negli edifici a cupola in Puglia. Il passaggio dal quadrato al cerchio*, in M. GIOVANNINI, G. GINEX (eds.), *Spazi e culture del Mediterraneo - 2, Mediterraneo Commercio Città Culto Presidio Texture Trasporti Economia*, Roma, Kappa, 311-321.

- RANALDI A. 2011, *Dalla realtà sensibile all'astrazione. La volta stellata del mausoleo di Galla Placidia*, in L. KNIFFITZ (ed.), *Architettura e mosaico. Atti della Giornata di Studi (Ravenna 2010)*, Ravenna, MAR - Museo d'Arte Ravenna, 20-42.
- RASHED R. 2003, *Al-Qūbī et Al-Sijzī: Sur le compas parfait et le tracé continu des sections coniques*, «Arabic Sciences and Philosophy», 13, 1.
- RASHED R. 2005, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, Al-Furqaan Islamic Heritage Foundation.
- RAYNAUD D. 2007, *Le tracé continu des sections coniques à la Renaissance: Applications optico-perspectives, héritage de la tradition mathématique arabe*, «Arabic Sciences and Philosophy», 17, 299-345 (<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00376560>).
- RICCI C. 1914, *Il mausoleo di Galla Placidia in Ravenna*, Roma, Calzone.
- RIZZARDI C. 1996, *L'architettura del Mausoleo tra Oriente e Occidente: cosmopolitismo e autonomia*, in C. RIZZARDI, P. ANGIOLINI MARTINELLI (eds.), *Il mausoleo di Galla Placidia a Ravenna*, Modena, Franco Cosimo Panini, 129-146.
- RIZZARDI C. 2005, *Il cielo stellato del mausoleo di Galla Placidia*, in S. PASI, A. MANDOLESI (eds.), *Studi in memoria di Patrizia Angiolini Martinelli*, Bologna, Ante Quem, 277-288.
- RIZZARDI C., ANGIOLINI MARTINELLI P. 1996, *Il mausoleo di Galla Placidia a Ravenna*, Modena, Franco Cosimo Panini.
- ROSSI C., FIORILLO F. 2020, *The vaults of Umm al-Dabadib: Geometric study*, «Nexus Network Journal», 22, 4, 1-18 (<https://doi.org/10.1007/S00004-020-00532-X>).
- ROSSI G. 2008, *Geometria delle cupole in Puglia. Confronti tra architettura religiosa medioevale e le costruzioni rurali in pietra a secco*, in M. GIOVANNINI, G. GINEX (eds.), *Spazi e culture del Mediterraneo - 2, Mediterraneo Commercio Città Culto Presidio Texture Trasporti Economia*, Roma, Kappa, 323-341.
- SMITH E.B. 1950, *The Dome. A Study in the History of Ideas*, Princeton, Princeton University Press.
- STEFÀNO L. 2018, *S. Maria della Croce (Casaranello). Oltre un secolo di studi su un monumento paleocristiano del Salento*, Lecce, Edizioni Grifo.
- SWIFT E., ALWIS A. 2010, *The role of Late Antique art in Early Christian worship: A reconsideration of the iconography of the 'starry sky' in the 'Mausoleum' of Galla Placidia*, «Papers of the British School at Rome», 78, 193-217.

## ABSTRACT

Previous studies conducted on the Mausoleum of Galla Placidia (between AD 432 and AD 450) have allowed us to identify the geometric rule used for the creation of its starry sky and to propose the initial considerations about the morphology of its pseudo-dome. At first sight, the turns of the stars describe regular circumferences that seem to lie on a plane, in reality their trend is a space curve resulting from a projection on the surface of the ceiling from a point centrally located, approximately at the height of the base of the windows. The geometry underlying this tracing is based on a series of cones whose angle at the vertex increases progressively, and whose materialization is possible thanks to the knowledge of the operating principle of the astronomical instrument called Triquetra and Ptolemy's table of chords. Apparently irregular, the ceiling is set on a parallelogram and is not traceable to operations of revolution of a curve, a cross vault or a pavilion vault. The section of the mesh with a set of horizontal planes with a distance of 10 cm has generated a set of curves, all different from each other, which we perceive connected by an unusual rule, not yet investigated. An initial analysis allowed to verify that we are dealing with hyperbolas. The present work proposes to continue the investigation of these curves and to hypothesize a construction technique that can be adopted in the context of a building site.